AREA

AGENDA DE REFLEXIÓN EN ARQUITECTURA, DISEÑO Y URBANISMO
agenda of reflection in architecture, design and town-planning

número 3
Febrero 1996

Universidad de Buenos Aires
Facultad de Arquitectura, Diseño y Urbanismo
Secretaría de Investigaciones en Ciencia y Técnica

CONTENIDOS/CONTENTS

AREA

AGENDA DE REFLEXIÓN EN ARQUITECTURA, DISEÑO Y URBANISMO

agenda of reflection in architecture, design and town-planning

número 3, Febrero 1996

EL MODULOR DE LE CORBUSIER

Vera W. de Spinadel

Secretaría de Investigaciones en Ciencia y Técnica,
Facultad de Arquitectura, Diseño y Urbanismo,
Universidad de Buenos Aires
Dirección particular: Jose M. Paz 1131, Florida (1602),
Buenos Aires, Argentina.
Tel/fax (54-1) 795-3246.
E-mail: postmast@caos.uba.ar

sección áurea
golden mean

módulo
module

sucesión de Fibonacci
Fibonacci sequence

El Modulor de Le Corbusier, terminado de escribir a fines de 1948 en París, Francia, marca el punto culminante en el renacimiento del uso de la proporción matemática en el siglo xx. Sintéticamente, la propuesta de Le Corbusier es el establecimiento de un módulo arquitectónico basado en la sección áurea que toma en cuenta simultáneamente las dimensiones del cuerpo humano y la necesidad de producir en serie. Albert Einstein, el famoso físico autor de la teoría de la relatividad, opinó en 1946 en Princeton: "El Modulor es una gama de proporciones que hace lo malo difícil y lo bueno fácil".

Le Corbusier's Modulor
The Modulor, written by Le Corbusier at the end of 1948 in Paris, France, points out the highest point in the rebirth of the use of mathematical proportions in the 20th century. Synthetically, Le Corbusier proposal is the establishment of an architectonic module that takes into account simultaneously the human body dimensions as well as the need of series production. Albert Einstein, the famous physicist, author of the theory of relativity, formulated the following opinion in 1946 at Princeton: "The Modulor is a gamut of proportions that makes worse difficult and good easy".

Introducción

Le Corbusier fue el arquetipo de un arquitecto moderno que trabajó a partir de módulos. Y lo que distingue su escala es que se basó en dimensiones humanas, esto es, tomó medidas antropométricas con las cuales construyó su famoso Modulor, instrumento de trabajo basado en la estatura humana y en la matemática. Así logró, mediante cálculos sencillos, una estrategia aplicable tanto a los planos de una vivienda unifamiliar como a los de un edificio en torre, al arte tipográfico, a la planificación urbanística, así como a la manufactura de objetos de uso y consumo. Su propuesta consistió en un sistema generativo modular susceptible de crear la armonía en el diseño, como lo es el sistema musical de crear la armonía en música.

Le Corbusier comenzó trabajando, tal como relata en *El Modulor* 1 (1948), con un módulo basado en la medida 1,75 m como altura de un hombre —supuestamente francés— y ciertos números en dos escalas no le salían como él esperaba. Entonces, uno de sus colaboradores le dijo: "La altura con la que estamos trabajando, ¿no será quizá demasiado francesa? ¿No te has fijado en que, en las novelas policíacas inglesas, los buenos, como por ejemplo la policía, siempre miden seis pies?". Prosigue Le Corbusier: "Hicimos la prueba de aplicar este modelo y quedamos encantados al ver como las graduaciones del nuevo Modulor, basado en un hombre de seis pies de altura, se traducía ante nuestros ojos en cifras redondas en pies y pulgadas". Le Corbusier utilizó módulos basados no solamente en la altura de un hombre de seis pies sino también basados en dicho hombre con un brazo levantado por encima de la cabeza, y de hecho, fue este último símbolo el que Le Corbusier adoptó, más o menos como su escudo de armas.

Un poco de matemática

Desde el punto de vista geométrico, Le Corbusier se interesó por los llamados rectángulos áureos, en razón de su flexibilidad generativa. Tratemos brevemente de explicar en qué se basa, matemáticamente, dicha flexibilidad.

La "sección áurea" o "proporción áurea", así llamada por el glorioso Leonardo da Vinci[1] (i.1490-1516), se puede introducir de diferentes maneras. Una de las más simples es caracterizarla como la solución positiva del clásico problema planteado por Euclides[2] (c.300 AC: 1.VI pr.30): Dividir un segmento en media y extrema razón. Esto es, dado el segmento AB, encontrar un tercer punto G (ver Figura 1), tal que los segmentos a y

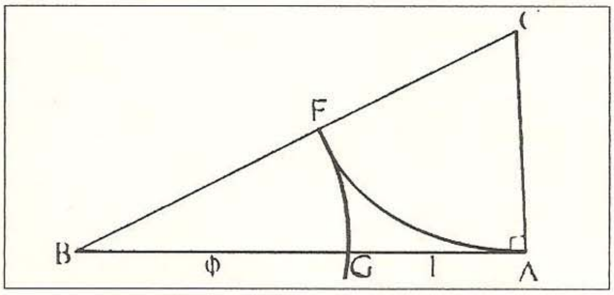

Figura 1. División de un segmento AB en media y extrema razón.

b, definidos por $a = BG$ y $b = GA$, cumplan con la siguiente proporción:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b},$$

esto es, el segmento total es al mayor como el mayor es al menor. Multiplicando medios y extremos de esta proporción y reordenando, resulta:

$$a^2 - a\,b - b^2 = 0.$$

Dividiendo toda la ecuación por b^2 tenemos

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b} - 1 = 0,$$

ecuación del tipo $x^2 - x - 1 = 0$, cuyas soluciones son:

$$x = \frac{a}{b} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

La solución con el signo menos es descartada

1. Leonardo da Vinci, nacido en 1452 y muerto en 1519. Pintor, escultor, arquitecto e ingeniero, rival de Miguel Angel y de Rafael. Es mejor conocido como pintor y sus obras más famosas son La Gioconda (Mona Lisa) *y* La última cena. *Escribió un tratado sobre pintura y dejó 14 volúmenes manuscritos, en los cuales se revela como un científico, insistiendo en el uso del método matemático y resumiendo, con sorprendente originalidad, el conocimiento existente en su época.*

2. Euclides, nacido en 365 y muerto en 300 AC. Muy poco se sabe sobre este matemático que publicó un gran número de libros, entre ellos, sus famosos Elementos, *cuya importancia científica y pedagógica se aprecia al considerar que está aún vigente en nuestras escuelas.*

pues es negativa y al cociente

$$\frac{a}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618...$$

se lo llama el *número de oro* y se lo indica con la letra griega ϕ, inicial de Fidias, escultor griego que usó concientemente este número en sus esculturas. Esta nomenclatura fue propuesta por Mark Barr, en el apéndice matemático del excelente libro de Sir Theodore Cook (1918). La construcción geométrica de la Figura 1 es la que se encuentra en las notas del artista Paul Klee (1961) y consiste en lo siguiente: 1) partir del segmento AB, 2) trazar $AC = AB/2$ perpendicular a AB, 3) con centro en C trazar el arco AF que corta a CB en F, 4) con centro en B trazar el arco FG que divide el segmento AB en dos partes que están en relación $\phi : 1$.

En general, si tomamos un rectángulo de lados a y b, donde $a > b$, al cociente $p(a,b) = Máx\,(a,b)/Mín\,(a,b)$ se lo llama *proporción del rectángulo*. Si esta proporción $p(a,b) = \phi$, el rectángulo se denomina *rectángulo áureo*. Es muy fácil construir gráficamente un rectángulo áureo a partir de un cuadrado de lado unitario como se ve en la Figura 2.

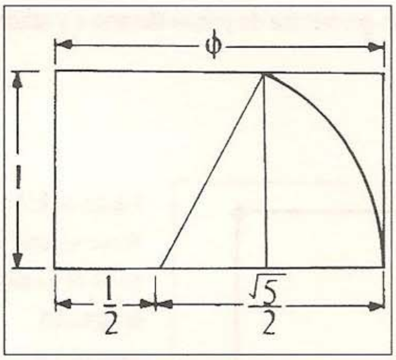

Figura 2. Construcción gráfica de un rectángulo áureo.

Geométricamente podemos verificar el siguiente hecho:

ϕ es el único número positivo que satisface la ecuación $\phi^2 = 1 + \phi$.

En efecto, como se ve en la Figura 3, el área del rectángulo áureo más el área del cuadrado construido sobre el lado menor, es igual al área del cuadrado construido sobre el lado mayor. Matemáticamente, se puede probar con todo rigor que el número ϕ es el *único* número que cumple con esta curiosa condición.

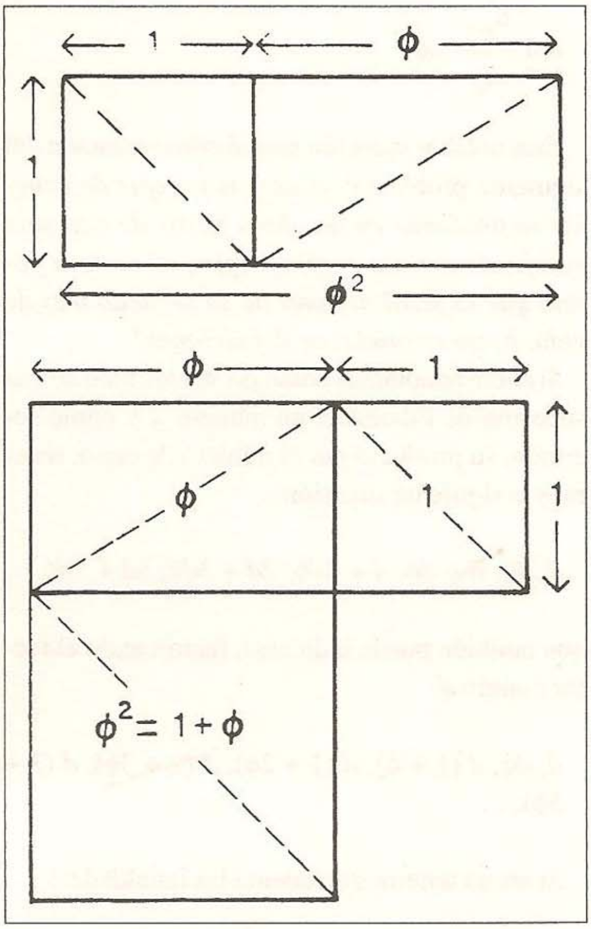

Figura 3. Verificación geométrica de la propiedad única del número ϕ por adición de áreas.

Otra manera, un poco más sofisticada, de obtener el número de oro es mediante una sucesión numérica llamada de Fibonacci:[3] 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89,... donde, como puede comprobarse fácilmente, cada número de la sucesión se obtiene por suma de los dos precedentes. Así, si llamamos:

$$u_0 = 1;\ u_1 = 1;\ ...;\ u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$$

3. Leonardo de Pisa, llamado Fibonacci (hijo de Bonaccio), viajó repetidas veces a Arabia con su padre mercader y mediante su libro Liber Abaci, *publicado en el año 1202, introdujo en Europa el uso del sistema arábigo-hindú de numeración, así como otros métodos matemáticos superiores conocidos en Oriente.*

se puede probar que el cociente de dos términos consecutivos, cuando el número de términos de la sucesión crece, tiende al número de oro ϕ. Matemáticamente, esto se expresa escribiendo:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \phi.$$

Esta notable sucesión surgió como solución del siguiente problema: *¿Cuántas parejas de conejos se producen en un año a partir de una sola pareja si: a) cada pareja origina una nueva pareja que es fértil después de su segundo mes de vida, b) no se producen defunciones?*

Si ahora adoptamos como primer término de una sucesión de Fibonacci un número d y como segundo, su producto por el número de oro ϕ, tenemos la siguiente sucesión:

$$d,\ d\phi,\ d + d\phi,\ d + 2d\phi,\ 2d + 3d\phi,\ 3d + 5d\phi,\ \ldots$$

que también puede indicarse, factoreando el factor común d:

$$d,\ d\phi,\ d\,(1 + \phi),\ d\,(1 + 2\phi),\ d\,(2 + 3\phi),\ d\,(3 + 5\phi),\ \ldots$$

Si ahora tenemos en cuenta las igualdades:

$$1 + \phi = \phi^2;\ 1 + 2\phi = 1 + \phi + \phi = \phi^2 + \phi = \phi\,(1 + \phi) = \phi^3;\ \ldots$$

obtenemos la siguiente progresión geométrica de primer término d y razón ϕ:

$$d,\ d\phi,\ d\phi^2,\ d\phi^3,\ d\phi^4,\ \ldots$$

Esta proporción geométrica da origen a la tabla de rectángulos áureos de la Figura 4. La misma progresión geométrica da lugar al entramado áureo de la Figura 5.

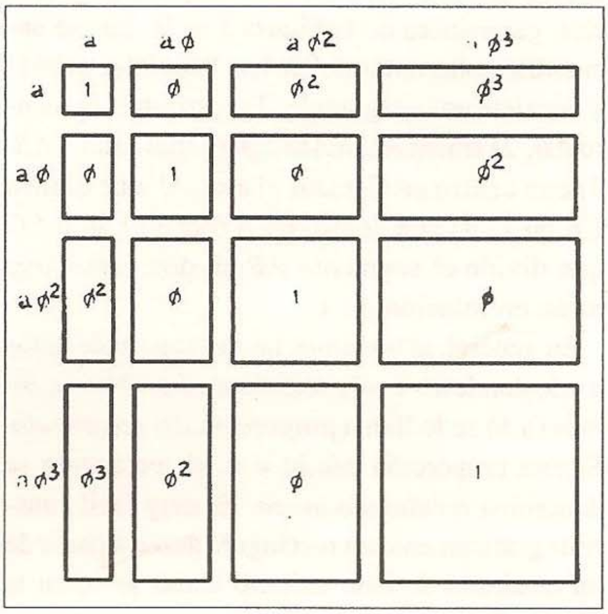

Figura 4. Tabla de rectángulos áureos obtenidos a partir de la progresión geométrica de primer término a y razón ϕ.

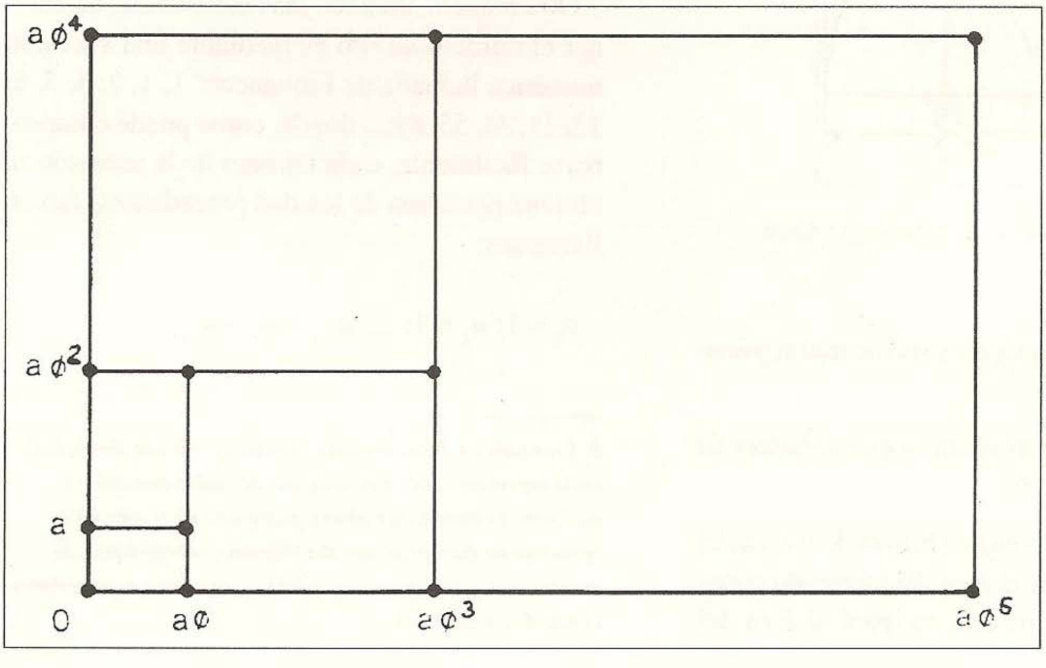

Figura 5. Entramado áureo obtenido a partir de la misma progresión geométrica.

La matemática aplicada a el Modulor

El principio generador de el Modulor surgió de la resolución del siguiente problema geométrico: insertar en dos cuadrados que contienen al hombre con el brazo levantado un tercer cuadrado en el lugar del ángulo recto. El procedimiento puede seguirse en la Figura 6. Se comienza con: a) un cuadrado unitario, b) se construye su sección áurea, c) se construye un ángulo recto sobre el eje del cuadrado inicial obteniéndose el punto *i*, d) se divide en dos partes iguales la distancia *gi*, e) resultan así dos cuadrados contiguos iguales al cuadrado inicial. El resumen de las proporciones obtenidas, aplicadas a un hombre de seis pies de altura puede apreciarse en la Figura 7.

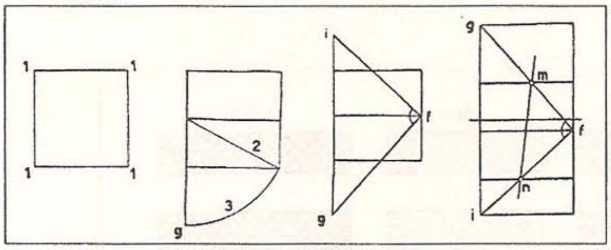

Figura 6. Principio generador de el *Modulor*.

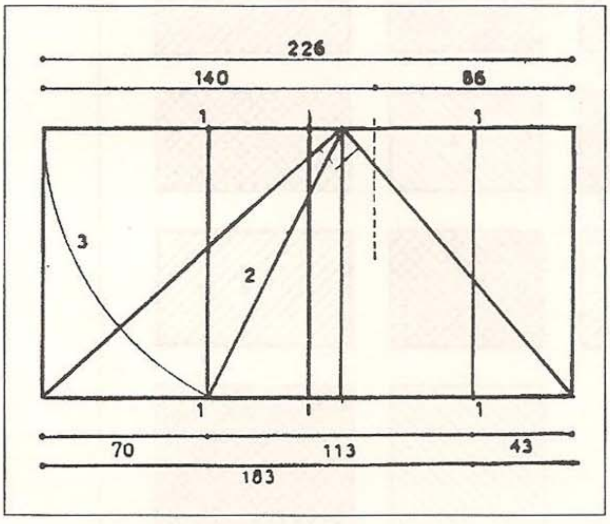

Figura 7. Aplicación del principio generador a un hombre de seis pies.

Curiosamente, el enrejado de las medidas esenciales en centímetros está en razón áurea y además, sus valores numéricos forman una sucesión de Fibonacci: 43, 70, 113, 183, 226, ..., como se ve en la Figura 8. Tres de estas medidas caracterizan al hombre en pie:

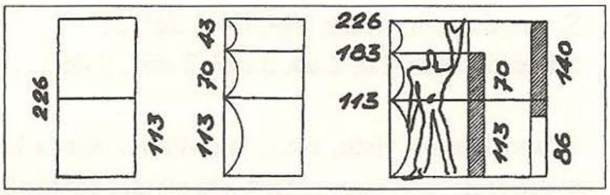

Figura 8. Enrejado de las medidas esenciales.

113, el plexo solar,
182, el vértice de la cabeza,
226, extremidades de los dedos con el brazo levantado.

La segunda razón áurea: 86, 140, 226, implica un cuarto punto esencial de la estatura humana: el apoyo de la mano restante a 86 cm (Figura 9). Finalmente, en la Figura 10 se representan todas las posiciones del hombre tipo.

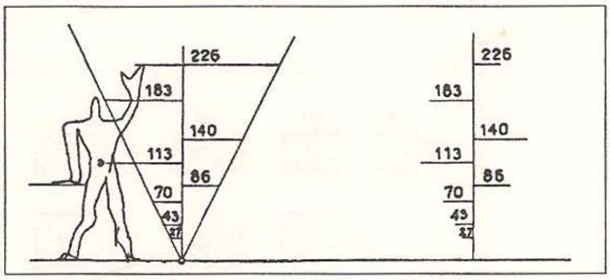

Figura 9. Escala *roja* (izquierda) y escala *azul* (derecha).

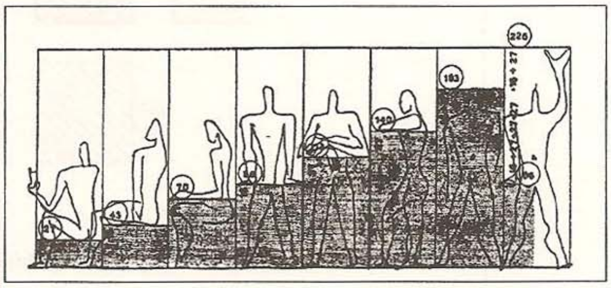

Figura 10. Ocupación del espacio por la figura humana.

Con estos valores y a partir de rectángulos áureos, por superposición y subdivisión, Le Corbusier pudo construir la malla fundamental de el Modulor. Una vez fijada la altura del hombre estándar d en 183 cm o 6 pies:

$$d = 6 \text{ pies} = 6 \times 30{,}48 \text{ cm} = 182{,}88 \text{ cm} \cong 183 \text{ cm},$$

Le Corbusier considera la *sucesión roja* y la *sucesión azul*, incorrectamente llamadas serie roja y serie azul, pues una serie es una suma de un número infinito de números.

Sucesión roja: $d, d\phi, d\phi^2, d\phi^3, d\phi^4, \ldots$

Sucesión azul: $2d, 2d\phi, 2d\phi^2, 2d\phi^3, 2d\phi^4, \ldots$

Como hemos visto, estas sucesiones son a la vez progresiones geométricas de primer término d y razón ϕ y sucesiones de Fibonacci, ya que cada término se obtiene por suma directa de los dos inmediatamente precedentes. Es importante notar que *entre todas las progresiones geométricas, no hay más que una cuyos términos gocen de la propiedad aditiva: la sucesión áurea.*

La malla fundamental puede apreciarse en la Figura 11. Aparecen en la misma tres grupos: rectángulos cuyos lados corresponden a la malla azul, rayados en una dirección, rectángulos cuyos lados corresponden a la malla roja, rayados en dirección opuesta, y por último rectángulos producidos por pares de dimensiones (una roja y una azul), rayados en forma superpuesta. En esta malla aparecen cuadrados, rectángulos de proporción 2 y rectángulos áureos. Observando cada fila o columna, se nota que dos rectángulos adyacentes de la misma sucesión (sea roja o bien azul), forman el próximo de la sucesión por yuxtaposición. En la Figura 12 se puede apreciar una malla ligada a la malla fundamental.

En la Figura 13 se representa la malla roja y en la Figura 14, la correspondiente malla azul. Por último, la Figura 15 contiene las dos mallas superpuestas.

A través de ambas mallas se puede fijar una escala relativa a las posiciones más habituales del ser humano, escala que marca el nivel constructivo proyectual, tanto en el diseño arquitectónico como en el diseño de los elementos supletorios incidentes con él.

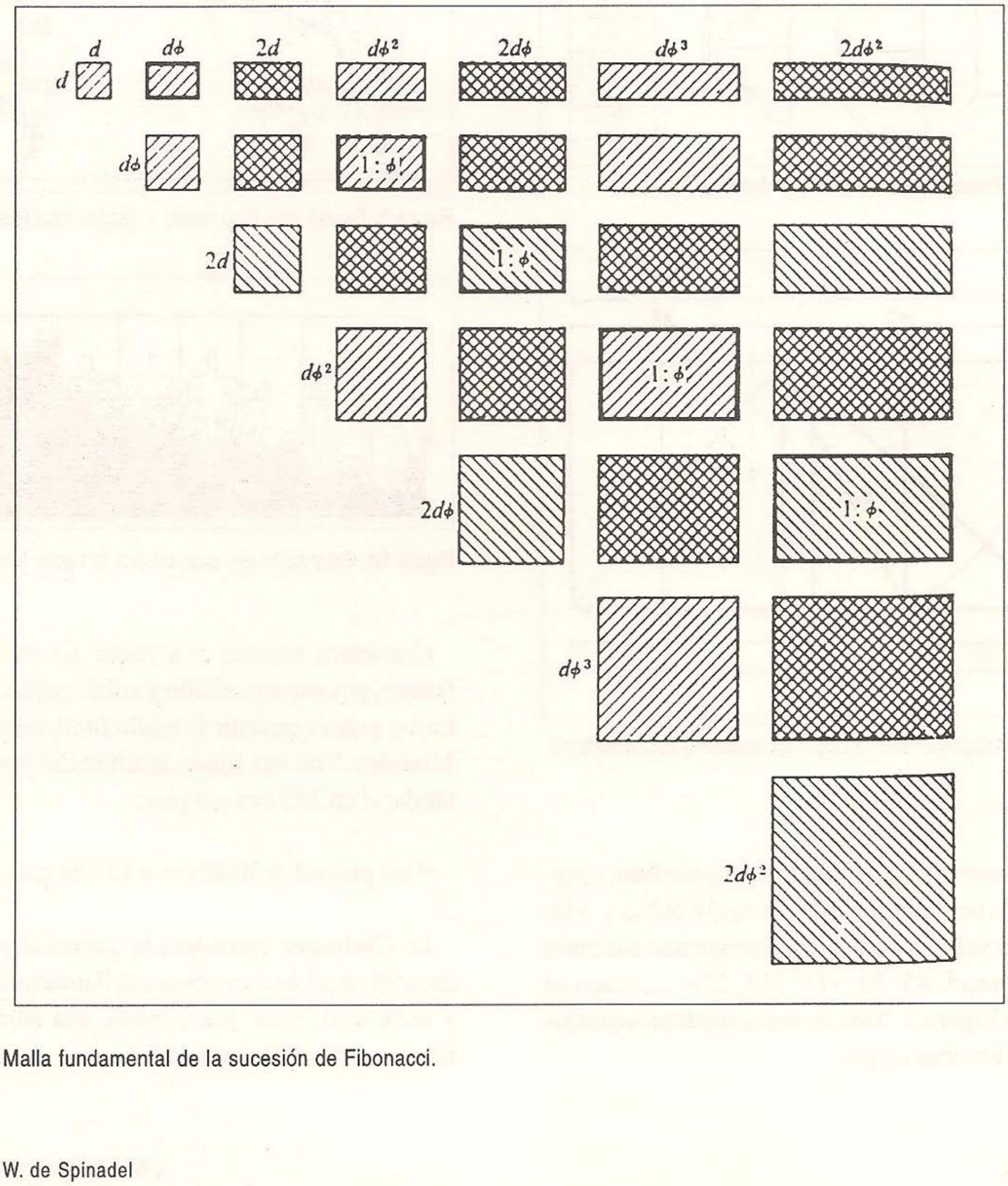

Figura 11. Malla fundamental de la sucesión de Fibonacci.

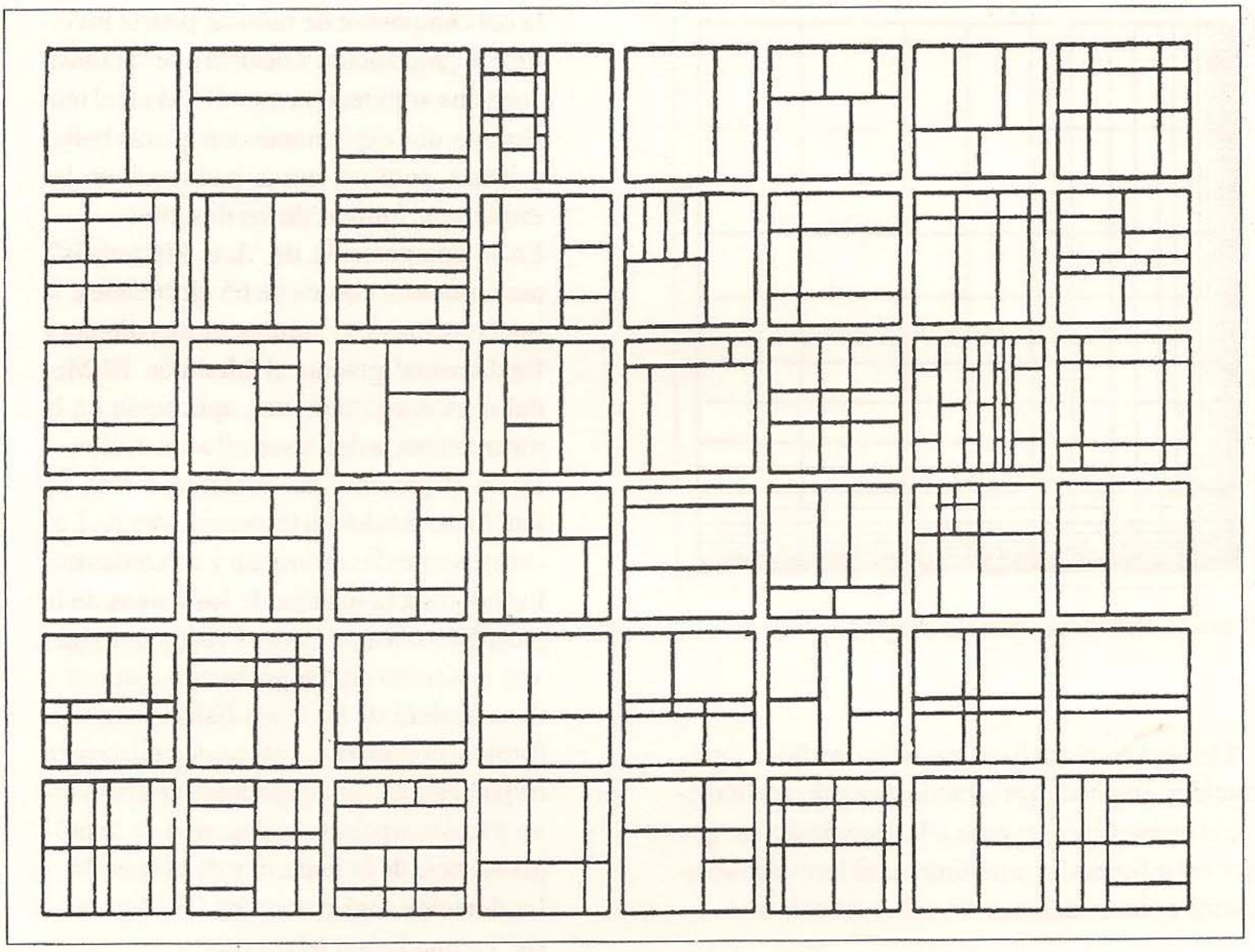

Figura 12. Malla ligada a la malla fundamental.

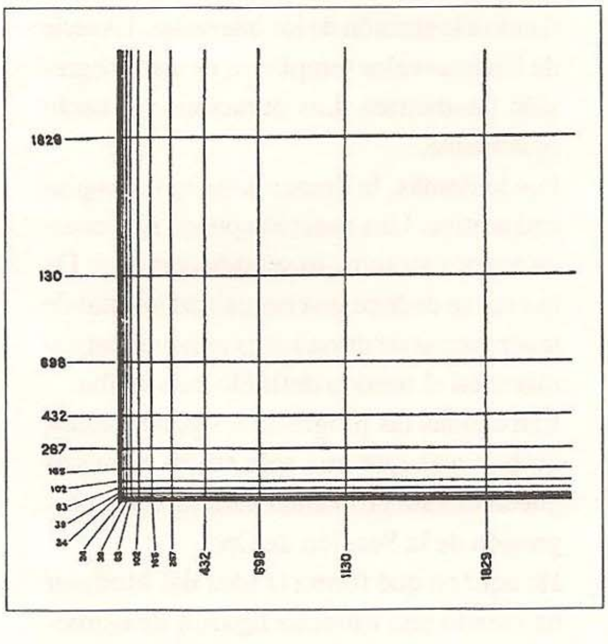

Figura 13. Malla *roja*.

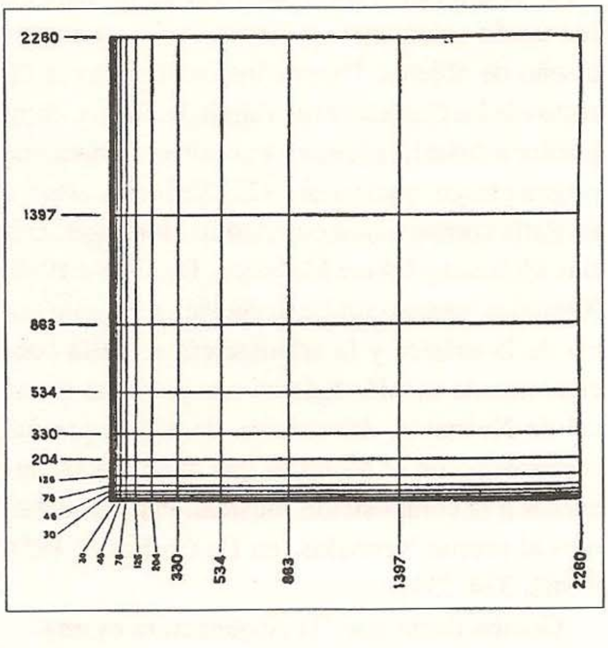

Figura 14. Malla *azul*.

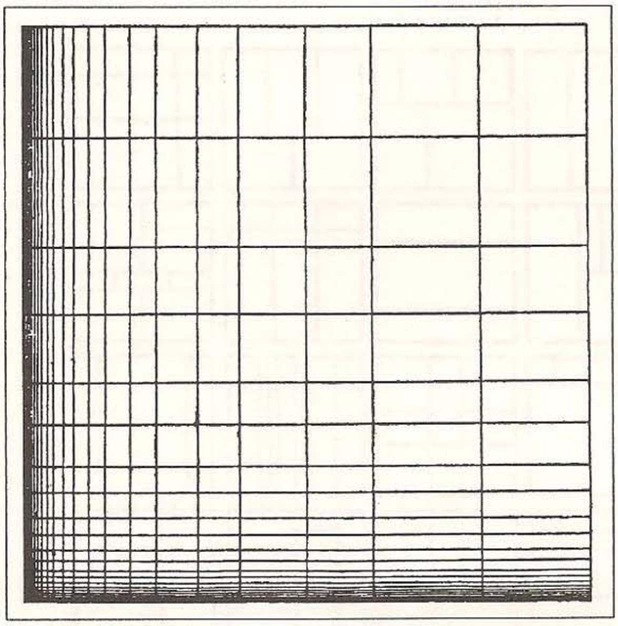

Figura 15. Mallas *roja* y *azul* superpuestas.

De hecho, al analizar todas las medidas introducidas, se puede apreciar dos sucesiones numéricas construidas en base a la sección áurea, que por estar formadas por números enteros son solamente aproximaciones de ambas sucesiones:

Sucesión roja: 4, 6, 10, 16, 27, 43, 70, 113, 183, 296, ...

Sucesión azul: 8, 12, 20, 32, 54, 86, 140, 226, 366, 592, ...

Por último, cabe mencionar que el Modulor no fue usado solamente en diseño arquitectónico y diseño de objetos. Uno de los colaboradores directos de Le Corbusier fue Yannis Xennakis, compositor musical, ingeniero y arquitecto francés de origen griego, nacido en 1922. Xennakis estudió en París composición con Arthur Honneger, Darius Milhaud y Oliver Messiaen. De 1948 a 1960, Xennakis trabajó con Le Corbusier, y esa tangencia de la música y la arquitectura se halla concientemente manifestada en una partitura musical de Xennakis, *Metástasis*, de 1954, que fue compuesta con el Modulor que aportaba sus recursos a la composición musical. Pero escuchemos al propio Xennakis (en Le Corbusier 1954 [1962: 334-335]):

> Goethe decía que "la Arquitectura es una música petrificada". Desde el punto de vista del compositor de música, podría invertirse la proposición y decirse que "la música es una arquitectura móvil". Al nivel teórico, las dos expresiones son quizás bellas y justas, pero no entran realmente en las estructuras íntimas de las dos artes.
>
> En la composición de "Las Metástasis", para orquesta clásica de 65 ejecutantes, la intervención de la arquitectura es directa y fundamental gracias al Modulor. El Modulor ha encontrado una aplicación en la misma esencia del desarrollo musical.
>
> Hasta el presente las duraciones eran un fenómeno paralelo al fenómeno sonoro. Los compositores las utilizaban y continúan utilizándolas a la manera de los físicos de la mecánica clásica. Para el físico del siglo XIX, el tiempo era un parámetro exterior a la naturaleza de las leyes físicas. Era uniforme y continuo. La mecánica relativista ha pulverizado aquel concepto aproximativo y ha incorporado la duración en la propia esencia de la materia y de la energía.
>
> La duración está tratada en las "Metástasis" en una forma relativista.
>
> Una de las aplicaciones esenciales de las "Metástasis" en este orden de ideas es que los seis intervalos algebraicos y templados de la gama de doce sonidos son emitidos dentro de duraciones proporcionales a las relaciones de frecuencia. De donde se deducen gamas de seis duraciones acompañando a la emisión de los intervalos. La serie de los intervalos templados es una progresión geométrica. Las duraciones lo serán igualmente.
>
> Por lo demás, la duración tiene la propiedad aditiva. Una duración puede ser sumada a otra y su suma es sentida como tal. De lo cual se deduce una necesidad natural de tener gamas de duraciones que puedan sumarse en el sentido definido más arriba.
>
> Entre todas las progresiones geométricas, no hay más que una sola cuyos términos gocen de esta propiedad aditiva. Es la progresión de la Sección de Oro.
>
> He aquí en qué forma la idea del Modulor ha creado una estrecha ligazón de estructura entre el tiempo y los sonidos.

Conclusión

Al comprobar cuán fechacientemente se adaptan las mallas del Modulor a la escala humana y cómo su aplicación resulta exitosa en distintos tipos de diseño —arquitectónico, gráfico, industrial, musical, de imagen, etc.—, surge en forma natural la pregunta: ¿no tendrá el Modulor, con todas sus combinaciones posibles, características de escala universal? Y, si como personalmente conjeturo, la respuesta es afirmativa, enseguida pregunto: ¿cuál es el motivo?

Y nuevamente recurro a la matemática: considero que la razón de dicha universalidad estriba en ser una escala basada en relaciones áureas y el número de oro ϕ, relaciones que con certeza permiten modelizar de manera unívoca fenómenos naturales o creados por el hombre en los que interviene el juego de magnitudes reales que se suman o se multiplican, dando siempre los mismos resultados.

Referencias

COOK, Sir Theodore. 1918. *The curves of life*, (Nueva York: Constable and Co.). Reimpresión (Nueva York: Dover, 1978).

EUCLIDES. c.300 AC. *The thirteen books of The elements*, trad. inglesa a partir del texto de Heiber por Sir Thomas L. Heath, 2da ed., en 3 vols. (Londres: Cambridge University Press, 1926). Republicación (Nueva York: Dover, 1956).

KLEE, Paul. 1961. *The nature of nature*, ed. J. Spiller (Nueva York: Wittenborn).

LE CORBUSIER. 1950. *Le Modulor* (París). Trad. española por Rosario Vera, *El Modulor. Ensayo sobre una medida armónica a la escala humana aplicable universalmente a la arquitectura y a la mecánica* (Buenos Aires: Poseidón, 1953).

——. 1954. *Modulor 2* (París). Trad. española por Albert Junyent, *Modulor 2 (Los usuarios tienen la palabra). Continuación de El Modulor 1948* (Buenos Aires: Poseidón, 1962).

LEONARDO DA VINCI. i.1490-1516. *Trattata della pittura*, a partir del Codice Vaticano Urbinate 1720 (Roma: Unione Cooperative Editrice, 1890). Hay versión española por Mario Pittaluga, *Tratado de la pintura* (Buenos Aires: Losada, 1943).

Recibido: 20 noviembre 1995; aceptado: 4 enero 1996.

Vera W. de Spinadel es Doctora en Ciencias Matemáticas, graduada en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires (UBA). Es Profesora Titular Consulta con dedicación exclusiva en la Facultad de Arquitectura, Diseño y Urbanismo, de la UBA. Dirige el Grupo de Matemática Aplicada que ha realizado, bajo su dirección, diversos trabajos de investigación subsidiados por la Secretaría de Ciencia y Técnica de la UBA. Ha sido becaria de la OEA y ha recibido anualmente desde 1993 el Premio a la Producción Científica y Tecnológica de la UBA. Recientemente organizó en la Facultad de Arquitectura, Diseño y Urbanismo el Congreso Internacional sobre Matemática y Diseño, MyD-95, del 23 al 27 de octubre de 1995, cuyos Anales están en prensa. Ha escrito siete libros publicados por editoriales nacionales, tiene en elaboración uno a publicarse en una editorial norteamericana y ha publicado los resultados de sus investigaciones, en forma individual o en equipo, en numerosas revistas a nivel nacional e internacional. Ha participado en forma activa con ponencias y conferencias en los más importantes congresos de matemática de las últimas décadas. Tiene establecidos programas de intercambio con universidades de los Estados Unidos, Canadá, Brasil, Perú, Chile, Inglaterra, España, Alemania, Austria, Hungría, Rusia, Armenia, Israel, Japón, Indonesia, Australia y otras.